2024학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가
고난도 문항 해설 및 유사유형문제

1) 2024학년도 9월 모평 22번 - [정적분과 부정적분]

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)\,dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

[문항해설]

> 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는지 묻는 문제다. (나) 조건을 보고 바로 곱의 미분법을 떠올릴 수 없었다면 관련 정의를 꼼꼼하게 정리해 놓도록 한다. 적분구간에 미지수가 포함된 함수도 시험에 자주 등장하는 유형이므로 관련 개념을 확실하게 이해하고 동일 유형의 다양한 문제들을 평소 훈련하도록 한다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

함수 $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_0^x (t-1)f(x)\,dt$라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자. $\left|\lim_{k \to a+} h(t) - \lim_{t \to a-} h(t)\right| = 2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2020년 10월 학력평가 수학 B형 33번

[유사유형 풀어보기] _ 02

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x|g(x)| = \int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다.

(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2022년 3월 학력평가 수학 22번

[유사유형 풀어보기] _ 03

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=|g(x)-g(a)|$라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

§ 출전 : 고3 2022년 7월 학력평가 수학 15번

1) [정답] 80

[출제의도] 함수의 연속성과 적분의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\geq 1)\end{cases}$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1)\\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

(C_1, C_2 는 적분상수)

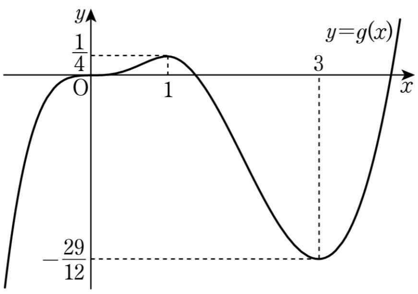
$g'(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$g(0)=0$ 에서 $C_1=0$ 이고 $-\frac{3}{4}+1=\frac{2}{3}-4+6+C_2$

에서 $C_2=-\frac{29}{12}$

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1)\\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12} & (x\geq 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$ 를 구하면

$$h(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\frac{29}{12} \text{ 또는 } t>\frac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t=-\frac{29}{12} \text{ 또는 } t=\frac{1}{4}\right)\\ 3 & \left(-\frac{29}{12}<t<\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $\frac{1}{4}$ 과 $-\frac{29}{12}$ 뿐이다.

그러므로 $S=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{29}{12}\right|=\frac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\frac{8}{3}=80$

[참고] $g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(ⅰ) $x<1$ 일 때,

$$g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$$

(ⅱ) $x\geq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned}&g(x)\\ &=\int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt\\ &=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12}\end{aligned}$$

2) **[정답] 4**

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

삼차함수 $g(x)$의 상수항이 0이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다. …… ㉠

조건 (가)의 에 $x=2a$를 대입하면 $2a|g(2a)|=0$

a가 양수이므로 $g(2a)=0$이고 $g(x)$는 $(x-2a)$를 인수로 갖는다. …… ㉡

㉠ , ㉡에서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$ (단, b는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분

가능하고, $\frac{d}{dx}\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt=(a-x)f(x)$이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}$$
$$=\lim_{x\to 2a+}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$$
$$=\lim_{x\to 2a+}x^2|x-b|$$
$$=4a^2|2a-b|$$
$$\lim_{x\to 2a-}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}$$
$$=\lim_{x\to 2a-}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$$
$$=\lim_{x\to 2a-}\left(-x^2|x-b|\right)$$
$$=-4a^2|2a-b|$$

이므로 $4a^2|2a-b|=-4a^2|2a-b|$에서 $b=2a$이다.

따라서 $g(x)=x(x-2a)^2$

$$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt=\begin{cases}-x^2(x-a)^2 & (x<0)\\ x^2(x-a)^2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

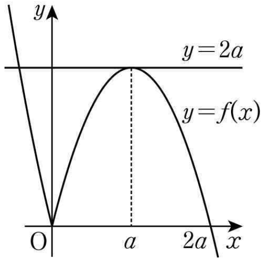
이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$(a-x)f(x)=\begin{cases}-4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\\ 4x(x-a)(x-2a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases}4x(x-2a) & (x<0)\\ -4x(x-2a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

방정식 $g(f(x))=0$에서 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 0, $2a$를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=2a$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$f(a)=-4a(a-2a)$

$=4a^2=2a$

$a=\frac{1}{2}$

$\int_{-2a}^{2a} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(4x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{1}(-4x^2+4x)\,dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{1}$

$=4$

3) [정답] ①

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0-}g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=0$

$g'(0)=2-p=0$, $p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

그러므로

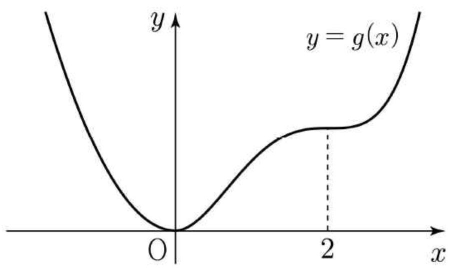
$$g(x)\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \int_0^x t(t-2)^2dt & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$g'(x)\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\neq\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$

$\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을

$\gamma(\gamma<0)$, 2라 하면

$$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

함수 $h(x)$는 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

$$g(2)=\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$$

$g(\gamma)=\gamma^2=\frac{4}{3}$, $\gamma=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

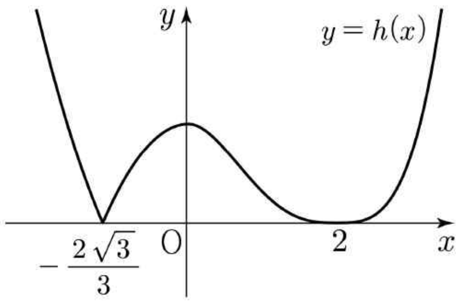
따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지

않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는

모든 a의 값의 곱은 $2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[참고]

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

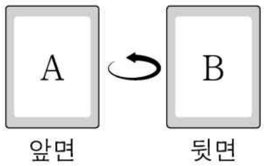


2) 2024학년도 9월 모평 29번 - [독립시행]

29. 앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고,
> 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다.

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128 \times p$의 값을 구하시오. [4점]



[문항해설]

\> 같은 조건의 시행을 반복하는 사건, 즉 독립시행의 개념을 잘 이해하고 있어야 풀이가 가능한 문항이다. 지문에서 요구하는 시행을 충실하게 따라가면 문제 이해와 풀이가 어렵지 않게 정리될 수 있다. 실제로 시행해보면 카드가 홀수 번 뒤집히는 경우를 찾아야 된다는 것을 알 수 있다. 이러한 요구만 찾아내면 계산은 독립시행의 기본연산 수준으로 마무리할 수 있다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

상자 A와 상자 B에 각각 6개의 공이 들어 있다.
동전 1개를 사용하여 다음 시행을 한다.

동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 상자 A에서 공 1개를 꺼내어 상자 B에 넣고, 뒷면이 나오면 상자 B에서 공 1개를 꺼내어 상자 A에 넣는다.

위의 시행을 6번 반복할 때, 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 될 확률은? [4점]

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{3}{64}$ ③ $\frac{5}{64}$ ④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{9}{64}$

§ 출전 : 고3 2018년 9월 평가원 수학 B형 20번

[유사유형 풀어보기] _ 02

A, B 두 사람이 각각 4개씩 공을 가지고 다음 시행을 한다.

A, B 두 사람이 주사위를 한 번씩 던져 나온 눈의 수가 짝수인 사람은 상대방으로부터 공을 한 개 받는다.

각 시행 후 A가 가진 공의 개수를 세었을 때, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

§ 출전 : 고3 2020년 10월 학력평가 수학 B형 29번

[유사유형 풀어보기] _ 03

한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) 앞면이 3번 이상 나온다. (나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다.

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{23}{32}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{25}{32}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

§ 출전 : 고3 2019년 11월 수능 수학 A형 20번

1) **[정답] ③**
출제의도 : 경우의 수를 이용하여 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?
정답풀이 :
6번째 시행 후 상자 B에 8개의 공이 들어 있으려면 동전의 앞면이 뒷면보다 2번 더 많이 나와야 한다. 따라서 앞면이 4번, 뒷면이 2번 나와야 한다.
상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되어야 하므로 5번째 시행 후에는 7이어야 하고 4번째 시행 후에는 6이어야 한다.
따라서 4번째 시행까지 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나와야 하고, 이 중 상자 B에 공이 8개 들어가는 경우를 제외하면 된다.
앞면을 ○, 뒷면을 ×로 나타내면 문제의 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

1 2 3 4	5 6
○ × ○ ×	○ ○
○ × × ○	○ ○
× ○ ○ ×	○ ○
× ○ × ○	○ ○
× × ○ ○	○ ○

5가지 경우 모두 앞면이 4번, 뒷면이 2번이므로 각각의 확률은
$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
따라서 구하는 확률은
$$5\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{64}$$

2) **[정답] 135**
[출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.
한 번의 시행 결과로 나타나는 경우의 확률은 다음과 같다.
① A가 가진 공의 개수가 1개 늘어나는 경우:
A가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이므로 확률은 $\frac{1}{4}$
② A가 가진 공의 개수의 변화가 없는 경우:
A, B가 던진 주사위의 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 확률은 $\frac{1}{2}$
③ A가 가진 공의 개수가 1개 줄어드는 경우:
A가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이므로 확률은 $\frac{1}{4}$
한편, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 되는 경우는 4번째 시행에서 ①이 일어나고 3번째 시행에서는 ① 또는 ②가 일어나야 한다.
(ⅰ) 3번째 시행에서 ①이 일어나는 경우
첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ③이 일어나거나 두 시행 모두 ②가 일어나야 하므로
$$\left\{2!\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$
(ⅱ) 3번째 시행에서 ②가 일어나는 경우
첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ②가 일어나야 하므로 $\left({}_2\mathrm{C}_1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
그러므로 구하는 확률은 $\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{7}{128}$
따라서 $p=128$, $q=7$이므로 $p+q=135$

3) [정답] ①

출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

앞면은 H, 뒷면을 T로 나타내기로 하자.

(i) 앞면이 3번 나오는 경우

H 3개와 T 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$

즉 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$(35-10)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

H 4개와 T 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_4=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 1

즉 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$(35-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(iii) 앞면이 5번 이상 나오는 경우

조건 (나)를 항상 만족시키므로 이 경우의 확률은

$({}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_6+{}_7\mathrm{C}_7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$(25+34+29)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$=\frac{88}{128}=\frac{11}{16}$

3) 2024학년도 9월 모평 30번 - [중복조합]

30. 다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le c \le d$

(나) $a \times d$는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

[문항해설]

> 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하는 문항이다. 30번 마지막 문항이라는 전통적 중압감이 느껴지지는 않지만, 끝까지 집중하여 연습하지 않으면 계산 오류가 나올 수 있으므로 마지막 순간까지 긴장을 놓치지 않아야 한다. 올해 수능완성 83페이지 17번 문항과 연계되어 있는 문항이다. 올해 수능은 킬러 문항이 사라지면서도 변별력이 있는 새로운 시험을 예고하고 있다. 교과서와 연계교재에서 참고할 수 있는 고난도 개념들을 총정리하여 시험에 응할 필요가 있다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.)

(가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고, 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.
(나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고, 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.
(다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고, 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.

§ 출전 : 고3 2019년 9월 평가원 수학 B형 29번

[유사유형 풀어보기] _ 02

네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.)

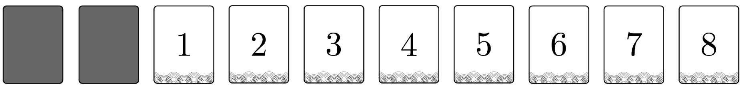
(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.
(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

§ 출전 : 고3 2020년 11월 수능 수학 A형 29번

[유사유형 풀어보기] _ 03

그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.)

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



§ 출전 : 고3 2023년 6월 평가원 수학 29번

1) [정답] 49
출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?
정답풀이 :
(ⅰ) 여학생 3명은 연필을 각각 1자루씩, 남학생 2명은 볼펜을 각각 1자루씩 받은 경우
남학생 2명이 받는 연필의 개수를 x, y, 여학생 3명이 받는 볼펜의 개수를
x', y', z'이라 하면
$x+y=4$(단, x, y는 음이 아닌 정수)
$x'+y'+z'=2$(단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)
이므로 그 경우의 수는
$${}_{2}\mathrm{H}_{4}\times{}_{3}\mathrm{H}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{4}\times{}_{4}\mathrm{C}_{2}$$
$$=5\times\frac{4\times3}{2}$$
$$=30$$
(ⅱ) 여학생 3명은 연필을 각각 2자루씩, 남학생 2명은 볼펜을 각각 1자루씩 받은 경우
남학생 2명이 받는 연필의 개수를 x, y, 여학생 3명이 받는 볼펜의 개수를
x', y', z'이라 하면
$x+y=1$(단, x, y는 음이 아닌 정수)
$x'+y'+z'=2$(단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)
이므로 그 경우의 수는
$${}_{2}\mathrm{H}_{1}\times{}_{3}\mathrm{H}_{2}={}_{2}\mathrm{C}_{1}\times{}_{4}\mathrm{C}_{2}$$
$$=2\times6$$
$$=12$$
(ⅲ) 여학생 3명은 연필을 각각 2자루씩, 남학생 2명은 볼펜을 각각 2자루씩 받은 경우
남학생 2명이 받는 연필의 개수를 x, y라 하면
$x+y=1$(단, x, y는 음이 아닌 정수)
이므로 그 경우의 수는
$${}_{2}\mathrm{H}_{1}={}_{2}\mathrm{C}_{1}=2$$
(ⅳ) 여학생 3명이 연필을 각각 1자루씩, 남학생 2명은 볼펜을 각각 2자루씩 받은 경우
남학생 2명이 받는 연필의 개수를 x, y라 하면
$x+y=4$(단 x, y는 음이 아닌 정수)
이므로 그 경우의 수는
$${}_{2}\mathrm{H}_{4}={}_{5}\mathrm{C}_{4}=5$$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$30+12+2+5=49$

2) [정답] 201
출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?
정답풀이 :
조건 (나), (다)에 의하여 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.
(ⅰ) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우
㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받는 경우
검은색 모자를 2개 받는 학생을 택하는 경우의 수는 3
이 각각에 대하여 다른 두 학생에게 흰색 모자 1개씩을 나누어 주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 다음과 같다.
검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 받지 않는 경우 나머지 흰색 모자 4개를 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수에서 학생 A가 4개를 모두 받는 경우의 수를 빼면 되므로
$${}_{3}\mathrm{H}_{4}-1=14$$
검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 1개 받는 경우 나머지 흰색 모자 3개를 세 학생에게 나누어 주면 되므로
$${}_{3}\mathrm{H}_{3}=10$$
그러므로 이 경우의 수는

$3\times(14+10)=72$

㉡ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받는 경우

검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 나머지 두 학생 중에 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생에게는 흰색 모자를 나누어주면 안되고, 다른 두 학생에게는 흰색 모자를 1개 이상씩 나누어주어야 한다. 즉, 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 학생 A가 4개를 모두 받는 한 가지 경우를 제외해야 하므로

${}_3\mathrm{H}_4-1=14$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times2\times14=84$

(ⅱ) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우

다른 세 학생 중 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3

다른 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고, 검은색 모자를 1개 받은 학생을 제외한 세명의 학생에게 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_4=15$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times15=45$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$75+84+45=201$

[다른 풀이]

조건 (나), (다)에 의하여 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받는 경우

검은색 모자를 2개 받는 학생을 택하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a, 검은색 모자를 2개 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b, 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c, d라 하면 $a+b+c+d=6$ $(0\le a\le3,$ $0\le b\le1,$ $c\ge1,$ $d\ge1)$이어야 한다.

$b=0$인 경우의 수는

$a+c'+d'=4$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d'의 모든 순서쌍 $(a,\ c',\ d')$의 개수에서 $a=4,$ $c'=0,$ $d'=0$인 1가지 경우를 제외하면 되므로

${}_3\mathrm{H}_4-1=14$

$b=1$인 경우의 수는

$a+c'+d'=3$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d'의 모든 순서쌍 $(a,\ c',\ d')$의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3=10$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times(14+10)=72$

㉡ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받는 경우

검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 나머지 두 학생 중에 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a, 검은색 모자를 1개 받는데 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b, 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c, d라 하면

$b=0,$ $a+c+d=6$

$(0\le a\le3,$ $c\ge1,$ $d\ge1)$

이어야 한다.

이 경우의 수는

$a+c'+d'=4$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d'의 모든 순서쌍 $(a,\ c',\ d')$의 개수에서 $a=4,$ $c'=0,$ $d'=0$인 1가지 경우를 제외하면 되므로

${}_3\mathrm{H}_4-1=14$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times2\times14=84$

(ⅱ) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우

다른 세 학생 중 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a, 검은색 모자를 1개 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b, 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c, d라 하면

$b=0,\ a+c+d=6$

$(0\le a\le4,\ c\ge1,\ d\ge1)$

이어야 한다.

이 경우의 수는

$a+c'+d'=4$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d'의 모든 순서쌍 $(a,\ c',\ d')$의 개수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{4}=15$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times15=45$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$72+84+45=201$

3) [정답] 25

출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

검은색 카드의 왼쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 a, 두 검은색 카드의 사이에 있는 흰색 카드의 장수를 b, 검은색 카드의 오른쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 c라 하면

$a+b+c=8$

조건 (나)와 조건 (다)에서 $b\ge2$이고, 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가 모두 3의 배수가 아닌 경우를 제외해야 한다.

음이 아닌 정수 b'에 대하여

$b=b'+2$으로 놓으면

$a+(b'+2)+c=8$

$a+b'+c=6$

방정식 $a+b'+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c의 모든 순서쌍 $(a,\ b',\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{2}=28$

이때 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가 1, 2인 경우, 4, 5인 경우, 7, 8인 경우를 제외해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$28-3=25$

[다른 풀이]

(ⅰ) 왼쪽의 검은색 카드가 1이 적힌 카드의 왼쪽에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 3이 적힌 카드의 오른쪽이므로 경우의 수는 6

(ⅱ) 왼쪽의 검은색 카드가 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 3이 적힌 카드의 오른쪽이므로 경우의 수는 6

(ⅲ) 왼쪽의 검은색 카드가 2가 적힌 카드와 3이 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 4가 적힌 카드의 오른쪽이므로 경우의 수는 5

(ⅳ) 왼쪽의 검은색 카드가 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 6이 적힌 카드의 오른쪽이므로 경우의 수는 3

(ⅴ) 왼쪽의 검은색 카드가 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 6이 적힌 카드의 오른쪽이므로 경우의 수는 3

(ⅵ) 왼쪽의 검은색 카드가 5가 적힌 카드와 6이 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 7이 적힌 카드의 오른쪽이므로 경우의 수는 2

(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 경우의 수는

$6+6+5+3+3+2=25$